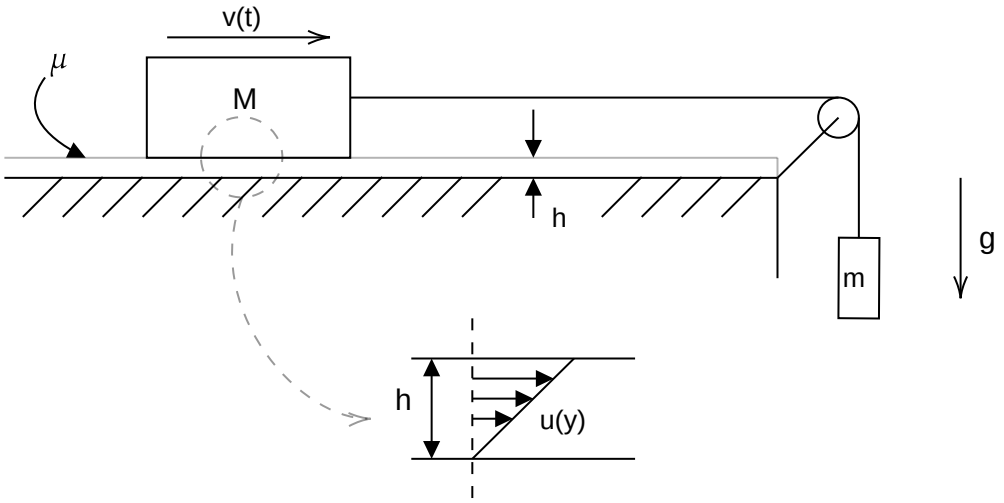
Esercizi di fluidodinamica

Esercizio 1

Si abbia un piano dove vi è una massa M, sotto al quale si abbia uno strato di lubrificante che ha viscosità μ ed un'altezza pari ad h. La massa M è collegata ad una carrucula, alla cui altra estremità vi è un corpo di massa m che spingerà la massa M. Si vuole conoscere l'andamento della velocità v nel tempo.



Dato che si tratta di un flusso di Couette, si possono trascurare i gradienti di pressione. Il τ di attrito sarà:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

ma dato che in questo caso il profilo di velocità è una retta, in questo caso il valore della derivata sarà costante:

$$\tau = \mu \frac{v(t)}{h}$$

La τ altro non è che la forza di attrito che subisce il blocco per unità di superficie, dunque la forza di attrito totale sarà:

$$F_a = \tau S$$

L'equazione del moto (equazione di Newton) per il sistema nel suo complesso quindi sarà:

$$mg - F_a = (M+m)a_{tot} \quad \Longrightarrow \quad mg - \mu S \frac{v}{h} = (M+m)\frac{dv}{t}$$

quindi la massa totale viene accelerata da mg e frenata dall'attrito viscoso. Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate ordinarie, è possibile quindi andarla a risolvere:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{S\mu}{(M+m)h}v = \frac{mg}{M+m}$$

la soluzione sarà data dalla somma della parte omogenea più una soluzione particolare che tiene conto della forzante. Ovvero una generica equazione differenziale che si presenta nella forma:

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

ha come generica soluzione:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[c_1 + \int g(t)e^{A(t)}dt\right] \qquad A = \int a_0(t)dt$$

in questo caso tuttavia dal momento che i coefficienti sono costanti la soluzione diventa:

$$v(t) = c_1 e^{\frac{S\mu}{(M+m)h}t} + \frac{mg}{M+m}$$

è necessario inserire le condizioni iniziali per trovare la costante c_1:

$$v_0 = c_1 + \frac{mgh}{\rho\mu} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = v_0 - \frac{mgh}{\rho\mu}$$

dunque la soluzione nel complesso sarà:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mgh}{\rho\mu}\right)e^{\frac{S\mu}{(M+m)h}t} + \frac{mg}{M+m}$$

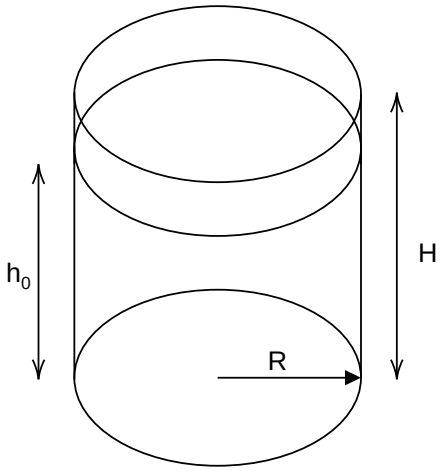
La soluzione avrà dunque un asintoto orizzontale all'infinito andando a stabilizzarsi ad un certo valore. A regine la soluzione sarà:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad mg = \mu\frac{v}{h}$$

Esercizio 2

Si abbia un cilindro riempito con un liquido fino ad una certa altezza h_0 che si trova ad una certa temperatura T_0. Il cilindro ha un raggio pari ad R e la sua altezza totale è pari ad H, si vuole sapere a quale temperatura debba essere portato il fluido per far si che espandendo riempia tutto il contenitore, sapendo che il coefficiente α ha come andamento:

$$\alpha = a + bT + \frac{c}{T}$$



Sapendo che la variazione di volume è legata ad una variazione di temperatua mediante la relazione:

$$-\frac{dV}{V}$$

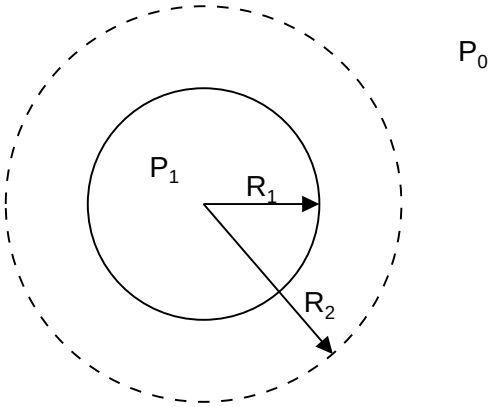
dunque è sufficiente sostituire l'espressione di α:

$$\frac{dV}{V} = \left[a + bT + \frac{c}{T}\right]dT \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = a(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}b(T_2 - T_1)$$

$$\Longrightarrow\ V_2 = V_1 e^{a(T_2-T_1)+\frac{1}{2}b(T_2^2-T_1^2)+c\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Esercizio 3

Si abbia una goccia e se ne vuole aumentare il volume iniettando del liquido mediante ad esempio una siringa. Si vuole conoscere il lavoro necessario per effettuare l'operazioene.



Il lavoro infinitesimo per aumentarne il volume sarà:

$$dW = pdv$$

l'andamento della pressione all'interno della goccia viene dato dalla legge di Laplace:

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{2\sigma}{R}$$

dato che i due raggi di curvatura nelle due direzioni dell'equazione di Laplace sono uguali dal momento che stiamo parlando di una sfera. Il lavoro dunque sarà dato dall'integrale di dW:

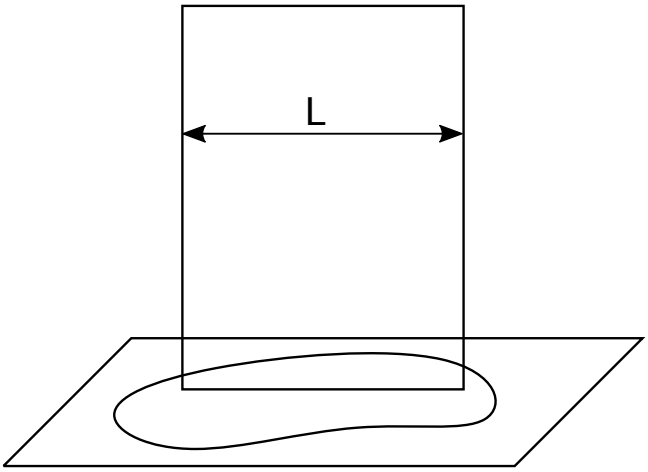
$$W = \int_{R_1}^{R_2} \Delta P \; dV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Longrightarrow \quad dV = 4\pi R^2$$

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2\sigma}{R}\right) 4\pi R^2 \; dR = 4\sigma\pi R^2 \Big|_{R_1}^{R_2} = 4\sigma\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

Si noti che per R che tende a zero, ΔP tenderà ad infinito ma il lavoro sarà nullo; viceversa per R che tende ad infinito si ha che ΔP tende a zero ma in realtà il lavoro che è lineare con R cresce tendendo ad infinito quindi nonostante la differnza di pressione da vincere diminuisca, si ha che il lavoro per aumentare il volume continua ad aumentare.

Esercizio 4

Si immagini di avere del fluido sparso su una superficie e di volerlo asciugare con un foglio di carta assorbente. Il foglio è costituito da tanti microcanali disposti parallelamente, ciò che succederà è che per capillarità il fluido tenderà a salire lungo i microcanali. Ci si chiede data una larghezza L del foglio ed un suo spessore δ si vuole conoscere il volume V d'acqua che è possibile drenare per capillarità ipotizzando che i microcanali abbiano un diametro di $d = 0.002\ mm$, la tensione superficiale $\sigma = 0.0071\ N\backslash m$ ed un angolo $\theta = 24$, una larghezza del foglio $L = 0.5\ m$, ed uno spessore $\delta = 0.1\ cm$.



Immaginando di poter ricoprire la superficie con delle circonferenze (si vogliono calcolare il numero di canali nel foglio):

$$N_{canali} = 0.5 \frac{1\ cm^2}{\frac{\pi(0.002\ cm)^2}{4}} \approx 200000$$

in cui 0.5 è un coefficiente che tiene conto di quanto i canali siano stati impacchettati bene. Si trova così che il volume di fluido all'interno del singolo tubo sarà:

$$V_{tubo} = \frac{\pi d^2}{4} h$$

in cui per capillarità l'altezza che il fluido raggiunge all'interno del singolo tubo sarà:

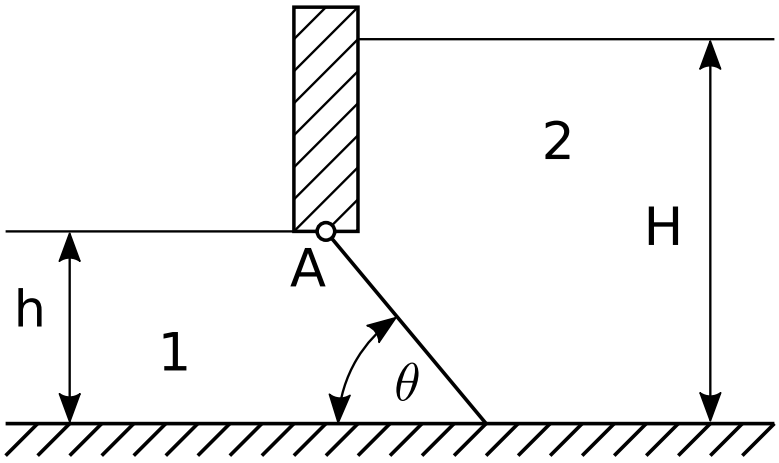
$$\frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g d}$$

il volume di fluido totale assorbito dal foglio sarà:

$$V_{asc} = V_{tubio} \cdot N_{tubi} \approx 0.4\ l$$

Esercizio 5

Si abbia un fondo ed una parete solida e poi un'altra parete incernierata chiamata A che tocca il fondo con un certo angolo θ, nel lato 2 vi è un fluido di densità ρ_2 con una profondità H, mentre nel lato 1 vi è dell'acqua, questa volta con profondità h; nella direzione perpendicolare al foglio il sistema ha una profondità b. Si chiede per quale valore di h la paratia non esercita alcuna forza sul fondo. $\rho_2 = 690\ Kg\backslash m^3$, $H = 2.3\ m$.



In questo caso entreranno in gioco due contributi alle forze di pressione, quelle atmosferiche che agiscono su tutti i corpi e quelle idrostatiche che agiranno dunque solo sulle facce bagnate da un dato fluido, le prime tuttavia è inutile includerle in quanto daranno risultanti di forze e momenti sempre nulli. La forza dovuta al solo contributo idrostatico sarà pari ad:

$$F_I = P_C \frac{hb}{\sin\theta}$$

cioè la pressione alla quota di immersione del centroide moltiplicata per la superficie bagnata dal fluido, il punto di applicazione sarà:

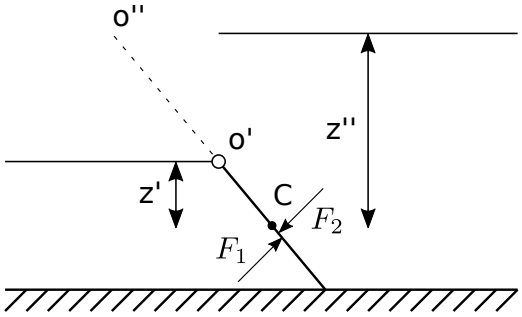
$$\xi_R = \xi_C + \frac{I_C}{\xi_C S}$$

Come si vede evidentemente la quota di immersione del centroide ξ_C sarà diversa fra i due lati del fluido (la posizione del centroide sul corpo è la stessa ma cambiano le profondità dai due lati), ricordando che la formula appena scritta è stata ottenuta integrando in un sistema di riferimento che parte dalla superficie libera. Detta quindi ξ'_R il punto di applicazione della forza F_1 nel riferimento O', stesso discorso per ξ''_R per F_2.

$$F_1 = \rho_1 g \frac{h}{2} \frac{hb}{\sin\theta}$$

$$F_2 = \rho_2 g \big(H - \frac{h}{2}\big) \frac{hb}{\sin\theta}$$

Affinché non vi siano forze risultati sul fondo, le due forze devono dare un momento risultante che si bilancia. Il momento può essere calcolato rispetto a qualsiasi punto, ma è chiaramente



più conveniente farlo rispetto alla cerniera A.

$$F_1\xi'_R = F_2\left(\xi''_R - \frac{H-h}{\sin\theta}\right)$$

Si dovranno calcolare ξ'_R e ξ''_R:

$$\xi'_R = \frac{h}{2\sin\theta} + \frac{bh^3}{12\sin^3\theta\frac{bh}{\sin\theta}\frac{h}{\sin\theta}} \implies \xi'_R = \frac{2h}{3\sin\theta}$$

quello appena ottenuto è un risultato generale, quando si ha una superficie rettangolare e l'origine del sistema (superficie libera) coincide con quella della piastra (rettangolare) si ha un carico rettangolare e dunque come lecito aspettarsi anche in virtù della posizione del baricentro, la forza viene applicata a 2\3 a partire dall'alto.

$$\xi''_R = \frac{H-\frac{h}{2}}{\sin\theta} + \frac{bh^3}{12\sin^3\theta\frac{bh}{\sin\theta}\frac{H-h\backslash 2}{\sin\theta}} \implies \frac{H-\frac{h}{2}}{\sin\theta} + \frac{h^2}{12\sin\theta(H-h\backslash 2)}$$

Andando adesso a sostituire ξ'_R e ξ''_R nei bilancio dei momenti si trova:

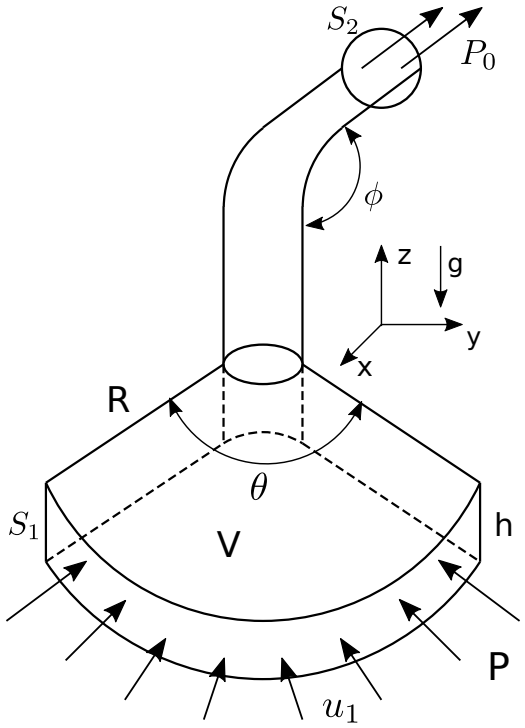
$$\rho_1 g\frac{h^2 b}{2\sin\theta}\cdot\frac{2h}{3\sin\theta} = \rho_2 g\left(H-\frac{h}{2}\right)\frac{bh}{\sin\theta}\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{h^2}{12\sin\theta(H-h\backslash 2)}\right) \implies$$

$$\frac{\rho_1 h}{3} = \rho_2\left(h-\frac{h}{2}\right)\left[\frac{1}{1} + \frac{h}{12(H-h\backslash 2)}\right] \implies$$

$$h = \frac{6\rho_2 H}{4\rho_1 + 2\rho_2}$$

Esercizio 6

Nel condotto in figura scorre dell'acqua che entra dal basso a velocità u_1 e pressione assoluta p ed esce in atmosfera da una sezione di diametro d formando un getto con un angolo ϕ rispetto alla verticale. La sezione di ingresso ha un'altezza verticale apri ad h ed il lato curvo ha un raggio di curvatura R ed un'apertura angolare θ. Se il volume di fluido contenuto nel condotto è pari a V, calcolare le forze che il condotto trasmette al fluido per mantenere la configurazione stazionaria.



$$\boldsymbol{F} = \int_{\hat{S}} \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \; dS + \int_{\hat{S}} P_r \boldsymbol{n} \; dS - \int_V \rho \boldsymbol{f} \; dV$$

La superficie $\hat{S}$ sarà composta da due parti, quella curva e più complicata da studiare di ingresso del fluido S_1 e quella circolare da cui il fluido esce S_2. come prima cosa è fondamentale andare a stimare la portata massica, infatti il primo termine dell'integrale potrebbe essere anche riscritto come:

$$\int_{\hat{S}} \boldsymbol{u}(\rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \; dS$$

in cui il termine fra parentesi in realtà sarà un termine scalare, un numero dunque che non conoscerà per questo sistema di riferimento. Per S_1 sappiamo già il valore della velocità e che questa ha la stessa direzione alla normale uscente alla superficie ma orientata in direzione opposta, si ha quindi:

$$\int_{S_1} -\rho u_1 \boldsymbol{u} \; dS$$

mentre per la S_2 essendo la normale costante l'integrale si può risolvere facilmente e si avrà:

$$\rho u_2 S_2 \boldsymbol{u_2}$$

da cui:

$$\int_{\hat{S}} \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \int_{S_1} -\rho u_1 \boldsymbol{u}\ dS + \rho u_2 S_2 \boldsymbol{u_2}$$

per quanto riguarda l'integrale di pressione, in S_1, la pressione relativa sarà pari a $P_r = P - P_0$:

$$\int_{\hat{S}} P_r \boldsymbol{n}\ dS = (P - P_0) \int_{S_1} \boldsymbol{n}\ dS$$

l'integrale lungo S_2 è nullo in quanto la pressione coincide con quella atmosferica e dunque la pressione relativa è nulla. Per l'ultimo integrale l'unica forza di volume $\boldsymbol{f}$ è g che è ovviamente antiparallela all'asse z:

$$\int_V \rho \boldsymbol{f}\ dV = g\hat{z}\rho V$$

$$\boldsymbol{F} = \int_{S_1} -\rho u_1 \boldsymbol{u}\ dS + \rho u_2 S_2 \boldsymbol{u_2} + (P - P_0) \int_{S_1} \boldsymbol{n}\ dS + g\hat{z}\rho$$

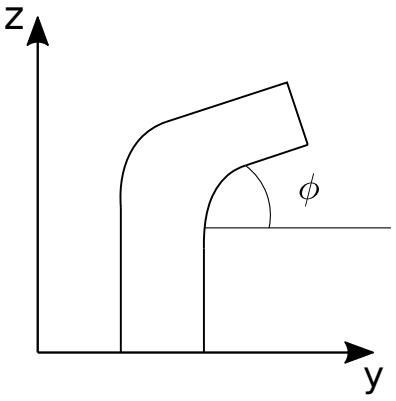
Si dovranno adesso trovare le singole componenti della forza F e per farlo si andrà a moltiplicare scalarmente la forza per i singoli versori degli assi.

$$F_x = \boldsymbol{F} \cdot \hat{x}$$

dalla geometria si vede che la componenti x della velocità sempre per la superficie 1 sarà $u_{1x} - u_1 \cos\theta$, u_2 giace nel piano $z - y$ quindi il suo prodotto scalare per x sarà nullo:

$$F_x = -\rho u_1(-u_1)hR \int_0^\theta \cos\theta\ d\theta + (P - P_0) \int_0^\theta \cos\theta\ d\theta$$

allo stesso modo sarà nullo il contributo delle forze esterne di volume lungo x dato che agisce soltanto la gravità.



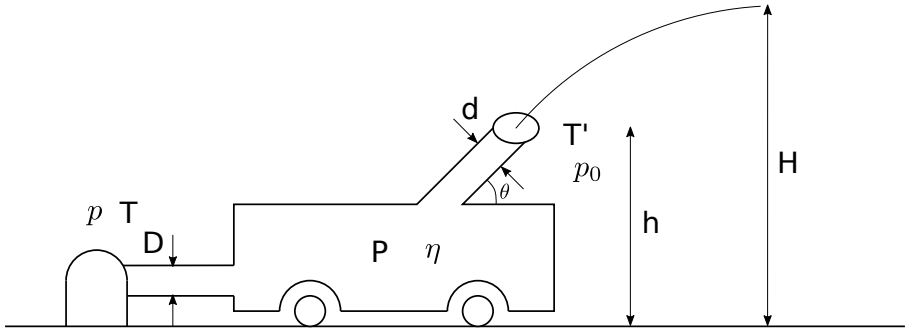
$$F_y = \boldsymbol{F} \cdot \hat{y} = -\rho u_1(u_1)hR \int_0^\theta \sin\theta\ d\theta + \rho u_2^2 S_2 \sin\phi + (P - P_0) \int_0^\theta \sin\theta\ d\theta$$

nuovamente il termine di gravità è nullo.

$$F_z = \boldsymbol{F} \cdot \hat{z} = -\rho u_2^2 S_2 \cos\phi + \rho g V$$

Esercizio 7

Si abbia un idrante per i pompieri di diametro D collegato ad un mezzo. All'interno mediante il lavoro P di una pompa con rendimento η la pressione verrà portata ad un certo valore e verrà quindi fatta uscire dal mezzo attraverso un'altra bocchetta di diametro pari a d. L'acqua viene prelevata dall'acquedotto ad una certa pressione p e temperatura T ed uscirà in ambiente dall'autopompa (dunque a pressione p_0) e con un temperatura T', ovvero l'acqua verrà riscaldata durante la compressione della pompa. Il getto viene sparato ad un'altezza h e si chiede di trovare l'altezza massima a cui arriva il getto H.



Normalmente la differenza tra T e T' sono estremamente piccole, tuttavia essendo pesate dal calore specifico che in generale è molto grande e dunque anche piccole variazioni di temperatura portano ad avere effetti energetici non trascurabili. L'equazione dell'energia per sistemi aperti in regime stazionario:

$$\dot{m}\left[\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+e+gz\right)_{out}-\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+e+gz\right)_{in}\right]=\dot{L_m}+\dot{Q}$$

in questo caso non viene ammesso del calore nel sistema (almeno non direttamente), per cui $\dot{Q}=0$. Se la pompa assorbe una potenza P ed ha un rendimento η, allora il lavoro meccanico trasferito al fluido sarà $\dot{L_m}=P\cdot\eta$. Trattandosi di acqua la densità ρ si può assumere come costante fra ingresso e uscita, le pressioni invece sono note come dati del problema (nell'equazione dell'energia va sempre utilizzata la pressione assoluta). La differenza fra le due quote sarà $gz_{out}-gz_{in}=gh$

$$\begin{cases}e_{out}=cT'\\e_{in}=cT\end{cases}$$

$$\dot{m}=\rho\frac{\pi d^2}{4}u_{out}$$

in questo modo dunque l'equazione dell'energia diventerà:

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}u_{out}\left\{\left[\frac{u_{out}^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+cT'+gh\right]-\left[\left(\frac{d}{D}\right)^4\frac{u_{out}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+cT\right]\right\}=P\eta$$

si ottiene così un'equazione di terzo grado in u_{out} dunque del tipo:

$$Au_{out}^3+Bu_{out}^2+C=0$$

questa equazione può essere risolta in vari modi, ad esempio mediante un metodo iterativo o in alternativa mediante via analitica. A questo punto per risolvere il problema e calcolare così H, si andrà ad utilizzare l'equazione di Bernulli:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cost$$

si andrà dunque a scrivere tale equazione tra la sezione di uscita dell'autopompa e il punto massimo del getto:

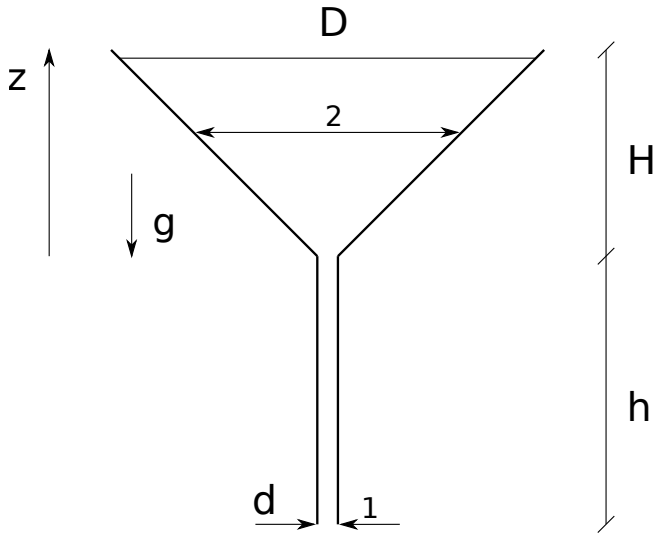
$$\frac{u_{out}^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} + gz_{out} = \frac{u_M^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} + gz_M$$

in cui M è appunto il punto massimo di altezza del getto, tuttavia non si conosce per il momento u_M, sappiamo che nel punto di massimo la velocità è tutta orizzontale e pari alla componente orizzontale della u_{out}, dunque $u_M = u_{out}\cos\theta$; chiamando $H' = z_M - z_{out}$:

$$H' = \frac{u_{out}^2}{2}(1 - \cos^2\theta) \implies H = h + \frac{u_{out}^2}{2}(1 - \cos^2\theta)$$

Esercizio 8

Si ha un imbuto molto grande (per cui si può trascurare la velocità con cui scende il fluido) con un diametro D ed una parte finale con diametro molto più piccolo pari a d, è completamente pieno d'acqua e ci si chiede quanto tempo impieghi per svuotarsi.



Si prende un asse z antiparallelo alla direzione della gravità avente come origine la fine della parte inclinata dell'imbuto. Si scrive adesso l'equazione di Bernulli fra una sezione qualsiasi della parte inclinata 1 dell'imbuto e la sezione di uscita 2:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} + gz_2$$

si ipotizza ora che $u_1 \approx 0$ perché è la velocità della superficie libera, questa ipotesi tuttavia sarà vera soltanto nel tratto inclinato in quanto in quello dritto la velocità con cui scende il

fluido è pari a quella con cui fuoriesce e dunque non si può dunque trascurare (in realtà quindi ci si dovrà fermare un po' prima dell'inizio di questo tratto). si trova così:

$$z_1 = \frac{u_2^2}{2} + gz_2 \implies u_2 = \sqrt{2g(z+h)}$$

questa dunque sarà la velocità in uscita dal tubo. La u_2 come si vede dipende dalla quota z, più cala e tanto più diminuisce la velocità. In un istante infinitesimo dt uscirà una quantità di fluido pari ad:

$$\frac{\pi d^2}{4} u_2 \, dt$$

ovvero sezione del tubo piccolo per la velocità di uscita per l'istante infinitesimo. A questo corrisponderà una variazione di quota del fluido infinitesima dal momento che si è scelto l'asse z verso l'alto e dunque $-dz$:

$$-\pi \left(\frac{zD}{2H} \right)^2 dz$$

in cui la quantità fra parentesi corrisponde al raggio in una sezione qualsiasi del cono. Dicendo dunque che tanto volume esce dal cilindro, tanto se ne perde dall'abbassamento del livello dell'acqua si ottiene:

$$\frac{\pi d^2}{4} u_2 \, dt = -\pi \left(\frac{zD}{2H} \right)^2 dz$$

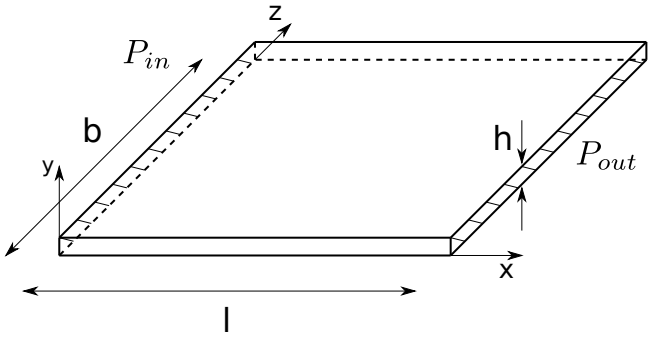
fondamentalmente si tratta di un problema differenziale, andando a sostituire al posto di u_2 l'espressione trovata e portando tutti i termini al secondo membro si ottiene:

$$\int_0^T dt = -\frac{D^2}{d^2 H^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{z^2}{\sqrt{z+h}} \, dz$$

in quanto per $t = 0$ la quota di z sarà pari ad H e stesso discorso per $t = T$. Andando a risolvere l'integrale di trova il tempo di svuotamento dell'imbuto

Esercizio 9

Si pensi di avere due lastre piane e parallele, con dimensioni molto diverse fra loro, lunghe l, larghe b e distanti fra loro h, l'ipotesi che si fa è che $h << l, b$. Le due sezioni avranno due pressioni differenti e sarà proprio questa differenza di pressione a spingere il fluido a muoversi fra le lastre, tuttavia la pressione lungo i due bordi dovrà essere omogenea.



In generale in vettore velocità è composto da tre componenti (u, v, w) tuttavia con molte simmetrie e costrizioni si può immaginare che alcune di queste componenti scompaiano, almeno lontano dai bordi ci si aspetterà che il flusso proceda soltanto in direzione x, dunque il vettore velocità sarà $(u, 0, 0)$. Quest'unica componente in generale sarà una funzione $u(x, y, z, t)$, si può ora immaginare che con pressioni costante il flusso sia stazionario, che per ogni sezione lungo l'asse z il flusso sia uguale (ipotesi di flusso bidimensionale), si ipotizza inoltre che $\mu = cost$ e che il flusso sia incomprimibile $\nabla \cdot u = 0$; con queste ipotesi è possibile risolvere analiticamente le Navier-Stockes. Si parte dall'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \implies hp\ flusso\ piano \implies \frac{du}{dx} = 0$$

questo significa che con le ipotesi fatte si era ottenuto $u(x, y)$, ma se tale derivata deve essere zero signica che u non può più dipendere neanche dalla x e quindi $u(y)$.

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dx} + w\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + f_x + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

questa è l'equazione in x del bilancio della quantità di moto.